A 2018/2019. tanévi
Országos Középiskolai Tanulmányi Verseny
második forduló

MATEMATIKA I. KATEGÓRIA

(SZAKGIMNÁZIUM, SZAKKÖZÉPISKOLA)

FELADATLAP

1. Oldja meg a valós számok halmazán a

$$12 \cdot sin^2 x + 7 \cdot ctg^2 x = sin^2(2x) + 12$$

egyenletet.

2. Aladár matematika év végi osztályzata az elmúlt tanévben 4-es lett. Elgondolkodott a nyár folyamán: „Ha az utolsó két 1-es dolgozatomat 5-ösre írtam volna, akkor az év végi jegyem 5-ös lett volna. Viszont ha mindkét évközi szóbeli feleletem egy jeggyel gyengébb lett volna, akkor 4-es helyett csak 3-ast kaptam volna év végén.” Legfeljebb hány ötöse lehetett Aladárnak az elmúlt tanévben matematikából?
(Az év végi jegy úgy számítandó, hogy ha a jegyek $\bar{x}$ átlagára $2{,}5 \le \bar{x} < 3{,}5$ teljesül, akkor az év végi jegy 3-as, ha $\bar{x} \ge 4{,}5$, akkor pedig 5-ös.)

3. Bizonyítsa be, hogy az

$$\frac{1}{216} + \frac{1}{217} + \frac{1}{218} + \cdots + \frac{1}{2019}$$

kifejezés értéke nem lehet egész szám.

4. Oldja meg a következő egyenletet a valós számok halmazán:

$$1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{log_x 2}}} = log_{4x}(9x - 1).$$

5. Az $ABCD$ négyzet körülírt körének tetszőleges pontjában húzzunk érintőt a körhöz. Vetítsük merőlegesen a négyzet A, B, C, D csúcsait erre az érintőre. A merőlegesek talppontjai legyenek rendre M, N, P, Q.
Mutassa meg, hogy az $AM \cdot CP + BN \cdot DQ$ szorzatösszeg éppen a négyzet területének a felével egyenlő.

Minden helyesen megoldott feladatért 10 pont adható.